最短路拍卖算法在交通流分配中的应用

王京元[1] 王 炜[2]

1．深圳大学，土木工程学院，深圳 518060

2．东南大学，交通学院，南京 210096

摘 要：拍卖算法是由 Bertsekas 教授提出的一种求解有向网络图最短路径的新算法，并已经发展成为求解线性网络流问题的综合算法。本文首先介绍了拍卖算法，分析了其特点，并将其与常用的标号设定算法和标号修正算法进行了对比。深入分析了交通路网的特点和交通分配中最短路求解的特性。研究结果表明，最短路拍卖算法特别适合于并行计算和大规模稀疏网络的求解，符合现实路网的特点和交通分配的要求。最短路拍卖算法应用于交通分配能避免大量不必要的计算，大大节省计算时间，在交通领域具有广阔的应用前景。

关键词：拍卖算法；最短路；交通分配

中图分类号：U491.124；TP301 **文献标识码**：A **文章编号**：1672-4747(2007)03-0016-05

Application of Auction Algorithm for the Shortest Paths in Traffic Flow Assignment

WANG Jing-yuan[1] WANG Wei[2]

1. The College of Civil Enginerring, Shenzhen University, Shenzhen 518060, China

2. Transportation College, Southeast University, Nanjing 210096, China

Abstract: Auction algorithm is a new and simple algorithm for finding the shortest paths in a directed graph proposed by Prof. Bertsekas and has been extended and applied to a variety

收稿日期：2006-09-05.

基金项目：国家自然科学基金，随机交通网络可靠性理论 ——连通性和旅行时间可靠性估计方法研究（No.50578037）。

作者简介：王京元（1977-），男，汉，山东省淄博市人，深圳大学讲师、博士，主要研究方向：交通运输规划与管理。

of linear network flow problems. The auction algorithm for the shortest paths was introduced and its characteristics were analyzed. The auction algorithm is compared with other widely used algorithms such as label-setting algorithm and label-correcting algorithm. The properties of the urban street network and the peculiarities of finding the shortest paths during traffic assignment were analyzed profoundly. The study results show that the auction algorithm is suitable to the parallel implementation and solving the large-scale sparse network. These fulfill the properties of actual road network and the requirements of the traffic assignment. A lot of computation amount can be avoided and the computing time can be reduced by the use of the auction algorithm in traffic assignment. Auction algorithm can be broadly applied in transportation fields.

Key words：Auction algorithm，shortest paths，traffic assignment

0 引 言

在求解用户平衡问题时，对每一 O-D 对都要反复寻找具有最短交通时间的路径，寻找 O-D 对之间的最短路径是交通量分配的核心。一方面，每一种交通量分配方法都是建立在最短路径求解的基础上；另一方面，在包括平衡分配法在内的任何一个分配法中，最短路径的计算占据了全部计算时间的主要部分，至少有 90%的计算时间花在最短路径的寻找上。因此，好的交通量分配法必须有一种非常有效的最短路径计算方法[1],[2]。

对于在交通分配中最短路的计算，国际上应用比较广泛的算法主要有两种，一种是 Dijkstra 算法（label-setting algorithm），一种是 Flody 算法（label-correcting algorithm）[3]。本文将介绍一种新的最短路的有效算法 —— 拍卖算法（auction algorithm）。

1 拍卖算法简介

拍卖算法最早由 Bertsekas 于 1979 年提出，用来解决指派问题（assignment problem）[4]。它模仿了现实中的拍卖过程。考虑如下拍卖过程：有 n 个人和 n 个物体，遵循“一对一”的原则，实现派对。假设物体 j 的价格为 p_j，要得到这一物体的人必须支付相应的价钱。人 i 与物体 j 派对可以获得的效益为 a_{ij}，纯利润为 $a_{ij}-p_j$。用 A 表示可以派对的人和物（i，j）的集合，$A(i)$ 表示可以和人 i 与派对的物体的集合，即 $A(i)=\left\{j\middle|(i,j)\in A\right\}$。每个人想获得使他获利最大的那一个物体 j_i，即 $a_{ij_i}-p_{j_i}=\max\limits_{j\in A(i)}\left\{a_{ij}-p_j\right\}$。为此，必须通过竞争和抬高价格，选择获益最多的那个物体。

任何解决指派问题的方法都可以经过推广，用于解决一般的最小费用流问题。经过十几年的研究，拍卖算法已经发展成为解决线性网络流问题的综合算法，可以用于求解指派问题、最小费用流问题、最大流问题、最短路问题、运输问题及换乘问题等。所有这些问题都是一般线性网络流问题的变形，并且都能转化成等价的指派问题进行求解。实践证明拍卖算法不仅具有重要的理论价值，并且在实际应用中取得了良好的效果。

2 最短路拍卖算法

2.1 算法描述

最短路拍卖算法也是由指派问题的拍卖算法演变来的，并且可以转化为等价的指派问题，具有标号设定算法和标号修正算法两种算法的特性。给定一个有向网络 $D(N，A)$，N，A 分别表示 D 的点集合和弧集合，弧（i，j）的长度为 a_{ij}。下面用一个起点和一个终点这种最简单的形式来介绍最短路拍卖算法的基本原理。

为方便起见做如下假设[5]：

（1）假设网络中只含有“正圈”；

（2）假设除终点外的每一个节点至少有一条前向弧，对于不满足条件的节点，可增加一条指向终点的弧，并赋给它一个很大的弧长；

（3）假设两个节点间在一个方向上最多有一条弧连接；这仅仅是为了表述上的方便，该算法能很好的解决一对节点间有多条弧连接的情况。

用 1 表示起点，t 表示终点，（i_1，i_2，…，i_k）表示一条路径，其中（i_m，i_{m+1}）($m=1$，…，$k-1$)表示弧。如果 i_1，i_2，…，i_k 是各不相同的，则（i_1，i_2，…，i_k）称为初等路，所有弧的长度之和就是路的长度。

在迭代过程中，始终保持路 $P=$（i_1，i_2，…，i_k）为初等路，节点 i_k 称作 P 的终点，并不断延伸和收缩。如果 i_{k+1} 不是路 $P=$（i_1，i_2，…，i_k）中的节点，并且（i_k，i_{k+1}）是一条弧，则用节点 i_{k+1} 来延伸 P 是指用路（i_1，i_2，…，i_k，i_{k+1}）来代替路 P；如果路 P 不止包含起点 1，收缩 P 是指用路 $P=$（i_1，i_2，…，i_{k-1}）来代替路 P。

在迭代过程中，价格矢量 $\boldsymbol{p}$ 要满足如下条件：

$$\boldsymbol{p}_i \leqslant a_{ij}+\boldsymbol{p}_j \quad \forall (i,j)\in A \tag{1a}$$

$\boldsymbol{p}_i=a_{ij}+\boldsymbol{p}_j$ 对于路 P 上所有连续的节点对（1b）

这称作松弛互补性条件（complementary slackness），简称 CS。这与指派问题拍卖算法的 CS 条件等价，并且，都可以由最小费用流问题的 CS 条件推导出来。

可以证明，如果（P，$\boldsymbol{p}$）满足 CS 条件，i 是 P 中的点（$i\in P$），则从起点 1 沿 $\boldsymbol{p}$ 到节点 i 的路是从 1 到 i 的最短路，并且，p_1-p_i 就是相应的最短路长度。假设满足 CS 的初始解（P，$\boldsymbol{p}$）可以得到，在假设所有弧长都是非负的情况下，这并不难得，一般用下面的默认初始解：

$$P=(1) \quad \boldsymbol{p}_i=0 \quad \forall i \tag{2}$$

从初始解开始进行迭代，由满足 CS 条件的一组（P，$\boldsymbol{p}$）得到另一组满足 CS 条件的解。在每一次迭代过程中，路径 P 或者是延伸到一个新的节点，或者是通过删除最后一个节点而收缩。当路径 P 收缩时，最后节点的价格严格增加。当路径 P 中只包含起始节点 1 时，称为退化解，在这种情况下，路径或者是延伸，收缩时将保持不变，仅仅增大 $\boldsymbol{p}_1$。具体的迭代过程如下：

用 i 表示路径 P 的最后一个节点。如果 $\boldsymbol{p}_i \prec \min\limits_{(i,j)\in A}\{a_{ij}+\boldsymbol{p}_j\}$，转到步骤（1），否则进入步骤（2）。

（1）收缩路径：令 $\boldsymbol{p}_i := \min\limits_{(i,j)\in A}\{a_{ij}+\boldsymbol{p}_j\}$，如果 $i\neq 1$，收缩 P。转入下一个迭代过程。

（2）延伸路径：通过节点 j_i 来延伸 P，$j_i=\arg\min\limits_{(i,j)\in A}\{a_{ij}+\boldsymbol{p}_j\}$。如果 j_i 是终点 t，则迭代终止，P 就是要求得最短路。否则，转入下一个迭代过程。

可以看出在路径的伸展过程中，P 是从 1 到 j_i 的初等路。事实上，如果这个结论不成立，则将 j_i 加入 P 则形成一个环，对于环中的每条弧都有 $\boldsymbol{p}_i=a_{ij}+\boldsymbol{p}_j$，由此可得环的长度将是 0，这与我们的假设矛盾。

2.2　算例

为便于比较，本文采用文献[2]里的算例（图 1），求节点 1 到节点 4 的最短路，弧上的数字表示弧长。具体迭代过程如表 1 所示，图 2 给出了每次迭代路径的最终节点和求解结束后每个节点最终价格。表 2 给出了用 Dijkstra 算法的计算过程。

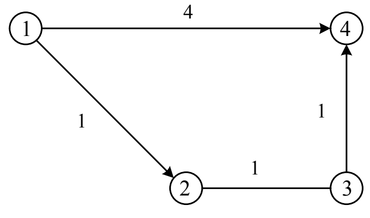

图 1　算例路网

Fig.1　Network example

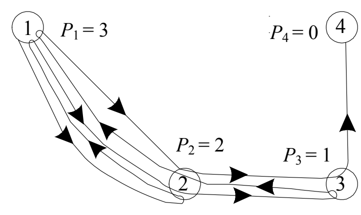

图 2　终节点的轨迹和最终的价格

Fig.2　Trajectory of the terminal node and final prices

表 1　拍卖算法求节点 1 到节点 4 的最短路迭代过程

Tab.1　The iterative process of the auction algorithm form node 1 to node 4

迭代	迭代前的 P	迭代前的 P	操作	迭代	迭代前的 P	迭代前的 P	操作
1	（1）	（0,0,0,0）	在 1 收缩	8	（1,2）	（2,1,1,0）	在 2 收缩
2	（1）	（1,0,0,0）	延伸到 2	9	（1）	（2,2,1,0）	在 1 收缩
3	（1,2）	（1,0,0,0）	在 2 收缩	10	（1）	（3,2,1,0）	延伸到 2
4	（1）	（1,1,0,0）	在 1 收缩	11	（1,2）	（3,2,1,0）	延伸到 3
5	（1）	（2,1,0,0）	延伸到 2	12	（1,2,3）	（3,2,1,0）	延伸到 4
6	（1,2）	（2,1,0,0）	延伸到 3	13	（1,2,3,4）	（3,2,1,0）	停止
7	（1,2,3）	（2,1,0,0）	在 3 收缩				

注：在节点 1 收缩不删除节点

表 2　Dijkstra 算法求节点 1 到节点 4 的最短路迭代过程

Tab.2　The iterative process of the Dijkstra algorithm from node 1 to node 4

迭代	检查路段	标号节点列				紧前节点列				检查列
		1	2	3	4	1	2	3	4	
初始化	—	0	∞	∞	∞	0	0	0	0	1
1	1→4	0	∞	∞	4	0	0	0	1	1,4
2	1→2	0	1	∞	4	0	1	0	1	2,4
3	2→3	0	1	2	4	0	1	2	1	3,4
4	3→4	0	1	2	3	0	1	2	3	4
5	—	0	1	2	3	0	1	2	3	

由表 1 可以看出，由节点 1 到节点 4 的最短路径为（1,2,3,4），最短路长度为 3，并且,可以求得节点 1 到节点 2 和 3 的最短路。

从表面上看，拍卖算法好像比 Dijkstra 算法复杂，其实并不然。通过对其复杂性分析，拍卖算法的复杂性要小于 Dijkstra 算法，对于本算例，拍卖算法的复杂性为 $O(4×3)$[5]，Dijkstra 算法的复杂性为 $O(4×4)$[6]。由计算过程可以看出，拍卖算法可以得到起点到最短路 P 上所有点的最短路，并且，最短路径极易追踪。

2.3　对基本拍卖算法的讨论

上面介绍的为最基本的拍卖算法，此算法不必改动，可以应用于一个起点和多个终点的情况。当所有的终点至少一次成为路径 P 的终点时，停止迭代。类似的可以将该算法应用于多个起点和一个终点的情况，只要将原问题的起点看成终点，终点当成起点，并使所有的弧反向，则就变成一个起点和多个终点的情况。

通过对随机产生网络的计算可知[5]，在串行机上，对于单个起点和单个终点以及单个起点和少量终点的情况，拍卖算法要快于其他的算法（标号设定算法和标号修正算法）；随着终点的增多，拍卖算法的速度将逐渐降低。对于求单个起点到所有节点的最短路的问题，拍卖算法并没有优势，甚至还稍慢于有的算法。但是拍卖算法比其他任何算法更适合于并行计算，对于单个终点和多个起点的情况，可以用不同的处理器来同时计算不同起点的最短路径，并能共享价格矢量 $\boldsymbol{p}$。从而大大增强了其求解多终点问题的能力。

在实际应用中可以通过各种途径对基本算法进行加速，其中最重要的是“双向算法”。上面介绍的算法可称作“前向算法”，如果将起终点颠倒，将所有的弧反向，应用上面的算法，则称为“后向算法”，在此不详细介绍。在并行算法中可以用两个处理器分别进行前向和后向路径的计算，并共享一个价格矢量。将后向算法与前向算法结合将大大加快算法的求解速度。

在拍卖算法的求解过程中，最费时的是 $\min\limits_{(i,j)\in A}\{a_{ij}+\boldsymbol{p}_j\}$ 的计算，利用迭代过程中的性质，在有些迭代过程中不必计算这一步，可以减少 30％～50 %，从而大大减少计算时间。另外，通过缩小弧长的做法，可以大大减小算法的复杂度。将这些措施联合应用，可以极大的提高求一个起点到所有节点最短路的计算速度。

不同的初始解迭代次数不同，对于弧长全为非负的情况，可以选择默认值，而对于存在负弧的网络则

不能直观的确定初始解，但有一定的算法进行确定[5]，并且合理的初始解可以减少迭代的次数。

3　拍卖算法在交通分配中的应用

在交通分配中，对于单路径交通分配（最短路分配和容量限制—增量加载分配）只要求得各个 O-D 点对之间的最短路即可，即求得小区形心之间的最短路。在实际的交通网络中，小区形心的节点占整个路网节点的比例较小，例如，在徐州市交通管理规划中所建立的路网，共有 396 个节点，而小区个数只有 81 个，仅占 20％[7]。Dijkstra 算法每次求得从起点到网络中任意一个顶点的最短路[6,8]，由东南大学所开发的“交运之星—TranStar”中采用了矩阵迭代法（Flody 算法），该算法求得所有节点对之间的最短路[9]。这将大大增加许多无谓的计算时间。在多路径分配算法（多路径分配和容量限制—多路径分配）中，为求有效路径，要求求出各个节点到某一终点的最短路径。实际应用中，速度较快的矩阵迭代法占用内存太大，使分配方法的容量大大减小[9]，其复杂度为 $O(n^3)$[3,6]。

拍卖算法可以较好的适应不同分配算法的需求。拍卖算法不仅很方便的求单个起点和单个终点的情况，也可以快速的求出多个起点和一个终点以及一个起点和多个终点的情况。在交通分配中，只要根据不同的需求选择不同的起点集和终点集即可。为提高计算速度，可以将终点区相同的 O-D 量（O-D 矩阵的一列）一次性分配，也可以将起点区相同的 O-D 量（O-D 矩阵的一行）一次性分配。

实际计算还表明，拍卖算法在求大型网络方面更具优势[4]。对于稀疏网络（即弧的数量远远小于网络节点数目的平方）随着网络规模的增大，其速度优势体现的愈加明显。实际的道路交通网络，往往只有邻近节点间才有弧连接，属于典型的稀疏网络。如南京市规划交通网络中有节点 179 个，按满密度计算应有 32 041 条弧，而实际只存在 600 条路段，无效率达 98％[10]。

4　结　语

拍卖算法是一种新兴的算法，经过近些年的研究，已成功应用到求解一系列线性网络流问题，发展成为一类综合的算法,并且已经应用到软件开发中，在实际应用中显示了良好的性能。拍卖算法在交通领域具有广阔的应用前景，不仅可用到最短路问题，还可以求运输问题、最小费用流及最大流等一系列问题，具有极大的理论价值和实用价值。随着研究的进一步深入，其应用将变得更加广泛，更具有竞争力。但目前拍卖算法并没有引起我国学者的注意，相关文献几乎没有，希望本文能起到抛砖引玉的作用。

参考文献

[1]　高自友，宋一凡，四兵峰．城市交通连续平衡网络设计 —— 理论与方法[M]．北京：中国铁道出版社，2000．

[2]　Sheffi Y. Urban transportation networks: equilibrium analysis with mathematical programming methods [M]. New Jersey: Prentice-Hall, INC, Englewood Cliffs, 1985.

[3]　Ahuja R. K, Magnanti T. L., Orlin J. B. Network flows theory, algorithms, and applications [M]. New Jersey: Prentice-Hall, INC, Englewood Cliffs, 1993.

[4]　Bertsekas D. P. Auction algorithms for network flow problems: A tutorial introduction [J]. Computational Optimization and Applications, 1992, (1): 7-66.

[5]　Bertsekas D. P. An auction algorithm for shortest paths [J]. SIAM J. for Optimization，1991，(1)：425-447.

[6]　谢金星，邢文训．网络优化[M]．北京：清华大学出版社，2000．

[7]　东南大学交通学院．徐州市交通管理规划报告[R]．东南大学交通学院，2003．

[8]　钱颂迪　等．运筹学[M]．北京：清华大学出版社，1990．

[9]　王　炜，徐吉谦，杨　涛　等．城市交通规划理论及其应用[M]．南京：东南大学出版社，1998．

[10]　李旭宏．道路交通规划[M]．南京：东南大学出版社，1997．