车辆随机路径选择的 GERT 算法

张 杨 黄 庆 贺政纲

西南交通大学，经济管理学院，成都 610031

摘 要：旅行费用与时间是人们出行选择路径时考虑的重要因素。本文讨论了车辆随机路径旅行费用与距离、时间之间的函数关系，在假定旅行费用与距离、时间正相关的条件下，依据矩母函数和 Mason 公式，给出车辆随机路径选择的 GERT 算法，并通过一个应用实例，表明了该算法的有效性。

关键词：随机路径；GERT 模型；算法

中图分类号：U491.1+3 文献标示码：A 文章编号：1672-4747（2005）01-0026-04

Algorithm for GERT Model of Stochastic Vehicle Routing Choice

ZHANG Yang HUANG Qing HE Zheng-gang

School of Economics and Management,

Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China

Abstract：Travel cost and the time are key problems when people select route. The function relation between stochastic travel cost and the time are studied in this paper. Assuming that travel cost and the time are linearly correlative, the algorithm of GERT model is concluded on the basis of moment generating function and Mason Formula. An example is given to illuminate how to use the algorithm, and the result shows that the method is effective.

Key words：Stochastic vehicle route choice, GERT model, algorithm

0 引 言

Graphical Evaluation and Review Technique (GERT)，即随机网络或图示评审技术，是由 E.Eisner 于 1962 年提出，后经 S.E.Elmaghraby 等人完善形成的。随后，GERT 在生产实践中，尤其是在工程项目管理中，得

收稿日期：2004-10-11.

作者简介：张 杨（1973-），男，河南信阳人，西南交通大学经济管理学院博士生，主要从事随机路径选择的研究。

到了广泛应用[1]-[3]。在交通领域，Paletta[4]提出了用网络模型来求解动态旅行商问题，Afeche 和 Philips[5]进一步利用网络技术研究了优先服务中的随机延迟问题。在 GERT 中，为了处理方便，通常假定各随机变量是相互独立的[6]。但这与许多实际情况不符，如城市交通中旅行费用与路长、时间是相互关联的，旅行时间与路长又是相互关联的。本文针对这一问题，研究了城市交通中车辆旅行费用与路长、时间线性正相关时 GERT 模型的算法，并通过实例将该算法应用到车辆随机路径选择决策中。

1　数学模型

城市交通中，由于顾客需求的随机出现、旅行时间的随机波动、交通事故的随机发生等因素，导致了随机车辆路径问题，这方面的研究较多[7][8]。人们出行做路径选择时主要考虑的是安全、经济和快捷。这里，假定城市交通道路网的安全性能是一致的，即出行者选择路径的决策目标函数为：

$$\mathrm{Min}\ [f_1(c)+f_2(t)] \tag{1}$$

假定车辆旅行费用是与距离、时间线性正相关的函数，其函数关系可描述为：

$$C=f(t,l)=at+bl+\xi \quad a>0 \quad b>0 \tag{2}$$

式中，a，b，ξ 是常量。

旅行路径一旦确定，其距离 l 就是确定的，也可表示为关于时间的函数；故旅行费用可简化为关于时间 t 的函数：

$$C=f(l,t)=c(t)=at+b \quad a>0 \quad b=bl+\xi \tag{3}$$

在城市交通中，对于一个确定的车辆旅行路径，通常总存在一个旅行时间，并对应着一个相应的旅行费用。现实中的旅行时间 t 由于受塞车等各种因素影响，是一个随机变量，所以，其旅行费用也必然是一个随机变量。如果时间 t 的概率密度函数 $g(t)$ 为已知，费用 C 的概率密度函数 $h(c)$可以通过高等数学知识求出。

设时间随机变量 T 的概率密度函数为 $g(t)$，且 $C=c(t)$，其中 $c(t)$单调可导，则费用随机变量 C 的概率密度函数 $h(c)$为：

$$h(c)=\begin{cases} g[c^{-1}(t)][c^{-1}(t)]' & \min c(t)=c_0\le c\le c_l=\max c(t) \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \tag{4}$$

由式（4）得，费用 C 的概率密度函数为：

$$h(c)=\frac{1}{a}g\left(\frac{c-b}{a}\right) \tag{5}$$

2　GERT 算法

2.1 车辆旅行费用与时间相关的 GERT 模型

根据矩母函数的定义[6]，费用的矩母函数为：

$$M_C(s)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{sc}h(c)\,\mathrm{d}c \tag{6}$$

由于 $t=c^{-1}(C)=\dfrac{c-b}{a}$，将式（5）代入式（6）得：

$$M_C(s)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{sc}\frac{1}{a}g\left(\frac{c-b}{a}\right)\mathrm{d}c=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{s(at+b)}\frac{1}{a}g(t)a\,\mathrm{d}t$$

$$=e^{bs}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ast}g(t)\,\mathrm{d}t \tag{7}$$

$$M_T(as)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ast}g(t)\,\mathrm{d}t \tag{8}$$

将式（8）代入式（7）得：

$$M_c(s)=e^{bs}M_T(as) \tag{9}$$

GERT 中含有随机变量时间 T 和费用 C 两个参数的矩母函数为：

$$M(s_1,s_2)=M_T(s_1)M_C(s_2)=e^{bs_2}M(s_1)M(as_2) \tag{10}$$

GERT 中传递函数为：

$$W(s)=pM(s_1,s_2)=pe^{bs_2}M(s_1)M(as_2) \tag{11}$$

由 Mason 公式,可解得 GERT 中任意两节点间的传递函数 $W_e(s_1,s_2)$

$$p_j=W_{ij}(s_1,s_2)\big|_{s_1=0,\,s_2=0}=W_{ij}(0,0) \tag{12}$$

$$M_{ij}(s_1,s_2)=\frac{W_{ij}(s_1,s_2)}{p_j}=\frac{W_{ij}(s_1,s_2)}{W_{ij}(0,0)} \tag{13}$$

由等价矩母函数知：

$$\begin{aligned} E(T)&=\frac{\partial[M_{ij}(s_1,s_2)]}{\partial s_1}\Big|_{S_1=0,\,S_2=0} \\ E(C)&=\frac{\partial[M_{ij}(s_1,s_2)]}{\partial s_2}\Big|_{S_1=0,S_2=0} \end{aligned} \tag{14}$$

$$D(T)=\frac{\partial^2[M_{ij}(s_1,s_2)]}{\partial s_1^2}\Big|_{S_1=0,S_2=0}-\left\{\frac{\partial[M_{ij}(s_1,s_2)]}{\partial s_1}\Big|_{S_1=0,S_2=0}\right\}^2 \tag{15}$$

$$D(C)=\frac{\partial^2[M_{ij}(s_1,s_2)]}{\partial s_2^2}\Big|_{S_1=0,S_2=0}-\left\{\frac{\partial[M_{ij}(s_1,s_2)]}{\partial s_2}\Big|_{S_1=0,S_2=0}\right\}^2 \tag{16}$$

$$R(T)=\frac{\sqrt{D(T)}}{E(T)} \qquad R(C)=\frac{\sqrt{D(C)}}{E(C)} \tag{17}$$

2.2 随机路径选择分析

城市交通中，从起点到终点的 m 条车辆随机路径，对其中任一条由 n 个路段组成的路径，每一路段的距离 l_{ij} 是关于时间 t_{ij} 的函数，可表示为：

$$l_{ij}\sim t_{ij} \quad j=i+1 \tag{18}$$

图 1 代表城市交通网络，节点表示交通路口，回路表示该点的堵塞情况（即堵塞等待时间），假设车辆在路段上的行使时间服从正态分布 $N(t_{ij},\sigma_{ij}^2)$，各点的堵塞时间密度函数由该点的历史数据获得，图 1 表示从起点到终点的两条路径的旅行状况：

由 Mason 公式，可得 GERT 中始点到终点的一条路径的传递函数为：

$$W_e(s_1,s_2)=\frac{\prod_{j=1}^{n}W_{ij}}{1+\sum_{j=1}^{n}c_n^r(-1)^r\prod_{j=1}^{n}W_j} \tag{19}$$

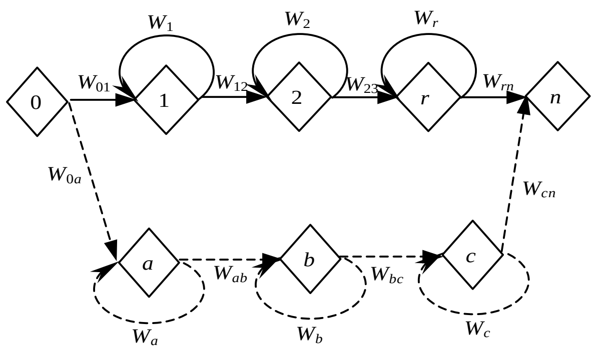

图 1　从起点到终点两条路径的旅行状况随机网络模型

Fig.1　Stochastic net model for two route travel conditions from the origin to the destination

3　算 例

设城市交通网络中某段路网的 GERT 模型如图 1 所示，该路网的两条路径中各路段及路口的旅行参数见表 1 所列。假设由起点到终点的旅行费用是关于距

表 1　某路网各路段和路口的旅行参数及矩母函数

Tab.1　Trip index and moment generating function of each section and intersection in a transportation net

旅行阶段	发生概率	时间/h				费用/yuang		
		分布类型	均值	方差	$M_T(s_1)$	固定费用	变动费用	$M_C(s_2)$
0-1	1.0	常值分布	0.5	0.0	$e^{0.5s_1}$	50	10	e^{50s_2}
1	0.1	指数分布	0.2	0.04	$e^{0.2s_1+0.04s_1^2}$	0	20	$e^{0.8s_2^2}$
1-2	0.9	正态分布	1.0	0.2	$e^{s_1+0.1s_1^2}$	30	10	$e^{30s_1+s_1^2}$
2	0.15	指数分布	0.3	0.09	$e^{0.3s_1+0.09s_1^2}$	0	20	$e^{1.8s_2^2}$
2-3	0.85	正态分布	0.6	0.1	$e^{0.6s_1+0.05s_1^2}$	60	10	$e^{60s_1+5s_1^2}$
0-a	1.0	正态分布	0.5	0.1	$e^{0.5s_1+0.05s_1^2}$	30	10	$e^{30s_1+s_1^2}$
a	0.15	指数分布	0.2	0.04	$e^{0.2s_1+0.04s_1^2}$	0	20	$e^{0.8s_2^2}$
a-b	0.85	正态分布	1.0	0.2	$e^{s_1+0.1s_1^2}$	40	10	$e^{40s_1+s_1^2}$
b	0.2	指数分布	0.3	0.09	$e^{0.3s_1+0.09s_1^2}$	0	20	$e^{1.8s_2^2}$
b-c	0.8	正态分布	0.8	0.1	$e^{0.8s_1+0.05s_1^2}$	20	10	$e^{2s_1+0.5s_1^2}$

离和时间线性正相关的函数，现在求到达节点 $n = 3$（即本例的终点）两条路径各自所需时间和费用的均值、方差及风险度。

解：对于路径 0123，距离是确定的，旅行费用是时间的线性正相关函数，可求得各路段通过时间的矩母函数 $M_T(s_1)$和费用的矩母函数 $M_C(s_2)$，并可求出相应的传递函数 $M_e(s_1，s_2)$，从而求得该路径的等价传递函数：

$$W_e(s_1,s_2) = \frac{W_{01}W_{12}W_{23}}{1-W_1-W_2+W_1W_2}$$

由等价矩母函数求得节点 3 到达的时间和费用的均值、方差及风险度分别为：

$E(T) = 2.1(\mathrm{h})$　$D(T) = 0.613$　$R(T) = 29.19\%$，

$P_3 = W_{03}\,(0, 0) = 0.765$

$E(C) = 140$ (yuang)　$D(C) = 4.319$　$R(T) = 25.74\%$

$P_3 = W_{03}(0,0) = 0.68$

对于路径 0ab3，同理可得：

$E(T) = 2.3(\mathrm{h})$　$D(T) = 0.35$　$R(T) = 25.74\%$，

$P_3 = W_{03}\,(0, 0) = 0.68$

$E(C) = 90$ (yuang)　$D(C) = 6.182$　$R(T) = 2.77\%$

4　结束语

本文讨论了旅行费用与时间和距离相关时的 GERT 算法，假定旅行费用与时间和距离成线性正相关时，对于某一确定的路径，旅行费用只与旅行时间线性正相关的前提下，该算法可较为方便地求出交通网络中，经过某一可选择路径，从起点至任一个节点的实现概率以及车辆旅行时间与费用的均值、方差和风险度等参数，从而为车辆路径选择提供决策依据。

参考文献

[1] Harrison J. M., Pich M. T. Two-monument analysis of open queueing networks with general workstation capabilities [J]. Operations Research（November-December），1996；44（6）：936-950.

[2] Martin Elkjaer. Stochastic budget simulation [J]. International Journal of Project Management，2000；18（2）：139-147.

[3] Tavares L. Valadares，Ferreira J A. Antunes，Coelho J. Silva. On the optimal management of project risk [J]. European Journal of Operational Research, 1998，107（3）：451-469.

[4] Paletta G. A multi-period traveling salesman problem heuristic algorithms [J]. Computer & Operations Research, 1992；18（8）：789-795.

[5] Afeche Philips. Delay performance in stochastic processing networks with priority service [J]. Operations Research Letters，2003；(5)：390-400.

[6] 江景波等. 网络技术原理及应用[M]. 上海：同济大学出版社，1990.

[7] Gendreau Michel，Laporte Gilbert，Sequin，Rene. Stochastic vehicle routing [J]，European Journal of Operational Research，1996；(1)：3-12.

[8] Haughton，Michael A. The performance of route modification and demand stabilization strategies in stochastic vehicle routing[J]. Transportation Research Part B：Methodological，1998；(8)：551-566.