

交通网络两个相邻结点之间 有流量约束的最大流分配算法

寇玮华 朱雪丽 张聪聪

西南交通大学，交通运输学院，成都 610031

摘要：交通网络最大流的分配是基于容量限制条件和流量守恒条件进行的，但在实际应用中，往往对交通网络中两个相邻结点之间的流量有具体的要求和约束限制。本文对交通网络中两个相邻结点之间的流量约束问题进行了分析，基于寻找增流链的算法，构造了带有上限或下限三种流量约束限制条件下的最大流分配算法，这些算法可以为解决实际的交通问题提供一定的应用基础。

关键词：最大流；增流链；流量约束条件；交通网络

中图分类号：U121

文献标识码：A

文章编号：1672-4747(2010)01-0007-07

Maximum Flow Distributing Algorithm under Restricted Flow Condition Between Two Neighboring Sites in Traffic Network

KOU Wei-hua ZHU Xue-li ZHANG Cong-cong

College of Traffic & Transportation, Southwest

Jiaotong University, Chengdu 610031, China

Abstract: For the traffic network, the distributing maximum flow is entirely based on the conditions of the capacity restriction and the flow conservation, but in practical, the flow between two neighboring sites is restricted. In this article, by description

收稿日期：2009-04-02.

基金项目：国家自然科学基金项目（60474022）和教育部博士点专项科研项目（20060613007）。

作者简介：寇玮华（1967-），男，蒙古族，内蒙古赤峰人，博士，西南交通大学交通运输学院副教授，硕士生导师，主要研究方向为交通运输网络控制及应用、交通信息工程及控制、智能控制。

and analysis, and in order to find an add-flow-path algorithm, three optimization algorithms with an upper limit and lower limit maximum flow were put forward on the traffic network. These optimization algorithms were likely to offer an application base for the practical traffic problems.

Key words: Maximum flow, add-flow-path, condition restricted flow, traffic network.

0 引言

最大流问题是图论中的核心问题之一,常用的 Ford-Fulkerson 算法是在容量限制条件和流量守恒条件下,基于寻找增流链对流量进行最大化的分配,而且,对于两个关联结点的流量分配没有任何约束限制条件^{[1]-[14]}。最大流分配问题有着大量的实际应用背景,同时,在实际应用中往往对交通网络中两个相邻结点之间的流量有具体的要求和约束限制,单纯的使用传统算法就不能够很好的解决有约束条件的最大流分配问题,所以,有必要在传统算法基础之上,构造可行的有约束条件的最大流分配算法。本文对交通网络中最大流的分配要求两个相邻结点之间的流量不能超过限制值、不能低于限制值以及在一定范围之内这三种约束条件进行了分析和分类,基于 Ford-Fulkerson 算法中寻找增流链的思路,结合两个相邻结点之间的流量有具体的要求和约束限制条件,构造了三种最大流分配算法。

1 基于寻找增流链的 Ford-Fulkerson 算法描述

将一个交通网络图用 $G = (V, E, C, F, X, Y)$ 来表示。其中,结点集合 $V = \{v_i | i = 1, 2, \dots, n\}$, 边集合 $E = \{(v_i, v_j) | v_i, v_j \in V\}$, C 为边的容量, F 为边的流量,集合 X 中的结点 x 为图 G 的源,集合 Y 中的结点 y 为图 G 的汇, $I = V - (X \cup Y)$ 中的结点为图 G 的中间点,步骤如下^{[1]-[3]}:

第一步 给图 G 一个初始流(一般为平凡流),给结点 x 标号。

第二步 寻找源 x 到汇 y 的增流链 Q :

(1)与结点 v 相关的边能否增流的条件:边 $e = (v, z)$ 为前向边, $f(e) < C(e)$; 边 $e = (v, z)$ 为后向边, $f(e) > 0$ 。

(2)对满足以上条件的结点 v 进行标记(u , 边的方向, $l(v)$)。其中 u 为标记点 v 的前一个结点; v 为终点时边的方向用“+”表示, v 为始点时边的方向用“-”表示; v 为终点时 $l(v) = \min\{l(u), C(u, v) - f(u, v)\}$, v 为始点时 $l(v) = \min\{l(u), f(u, v)\}$ 。

第三步 从汇 y 进行反向追踪,可得到增流链 Q 以及调整量 $l(Q) = l(y)$ 。

第四步 利用修改流性质进行调整:

- (1) 将增流链 Q 的前向边加上调整量 $l(Q)$;
- (2) 将增流链 Q 的后向边减去调整量 $l(Q)$;
- (3) 非增流链 Q 的边的调整量不变。

第五步 返回第二步,不断循环,直到不能找到增流链为止。

为了对 Ford-Fulkerson 算法引用方便,在这里假设用 $f_f(G)$ 表示 Ford-Fulkerson 算法,其中 G 表示交通网络图。

2 两个相邻结点之间流量有约束限制的分析及分类

为了描述图 G 中两个相邻结点之间流量有约束条件,将 Ford-Fulkerson 算法的描述形式采用 $f_f\{G, \text{MAXFlow}(A)\}$ 来表示,其中 $\text{MAXFlow}(A)$ 表示在约束条件 A 下的最大流量。针对 Ford-Fulkerson 算法,约束条件 $A = \emptyset$, 即对两个相邻结点之间最大流没有约束条件的 Ford-Fulkerson 算法用 $f_f\{G, \text{MAXFlow}(\emptyset)\}$ 表示。

对两个相邻结点之间流量有约束限制的三种情

况进行如下描述:

(1) 两个相邻结点之间流量不能超过限制值

假设两个相邻结点 v_i 和结点 v_j 之间流量不能超过限制值 Z , 用 $f_f \{G, \text{Flow} | (\text{Flow}(v_i, v_j) \leq Z)\}$ 来描述此约束条件。

(2) 两个相邻结点之间流量不能低于限制值

假设两个相邻结点 v_i 和结点 v_j 之间流量不能低于限制值 Z , 用 $f_f \{G, \text{MAXFlow} | (\text{Flow}(v_i, v_j) \geq Z)\}$ 来描述此约束条件。

(3) 两个相邻结点之间流量在一定范围之内

假设两个相邻结点 v_i 和结点 v_j 之间流量在限制值 Z_1 和 Z_2 之间, 用 $f_f \{G, \text{MAXFlow} | (Z_1 \leq \text{Flow}(v_i, v_j) \leq Z_2)\}$ 来描述此约束条件。

3 两个相邻结点之间流量有约束限制条件的算法

3.1 两个相邻结点之间流量不能超过限制值的算法

(1) 算法思想

将限制结点之间的容量值用限制值做新的容量, 因为流量的分配必须满足容量限制条件, 那么, 在计算过程中限制结点之间的流量不能超过新的容量值。

(2) 算法过程

假设结点 v_i 和结点 v_j 之间流量不能超过限制值 Z , 计算步骤如下:

第一步 用限制值 Z 代替图 G 中的 $C(v_i, v_j)$, 即 $C(v_i, v_j) = Z$, 将变化后的图用 G^n 表示。

第二步 针对新图 G^n 调用 Ford-Fulkerson 算法, 即 $f_f \{G^n, \text{MAXFlow} | (\emptyset)\}$ 。

第三步 图 G 中结点 v_i 和结点 v_j 之间流量不能超过限制值 Z 的最大流即为:

$$\begin{aligned} & f_f \{G, \text{MAXFlow} | (\text{Flow}(v_i, v_j) \leq Z)\} \\ & = f_f \{G^n, \text{MAXFlow} | (\emptyset)\} \end{aligned}$$

3.2 两个相邻结点之间流量不能低于限制值的算法

(1) 算法思想

在计算过程中, 先利用增流链方法将图 G 中两个

限制结点之间的流量调整到限制值, 在此基础上进行流量分配。限制结点之间的流量必须满足以下规则:

规则 1 新的增流链如果包含两个限制结点, 并且两个限制结点的边为前向边, 那么, 该边的流量调整量为容量减去流量;

规则 2 新的增流链如果包含两个限制结点, 并且, 两个限制结点的边为后向边, 那么, 该边的流量调整量为流量减去限制值;

规则 1 是使两个限制结点之间的流量在限制值基础上进行流量增加, 规则 2 是使两个限制结点之间流量的减少不低于限制值。

(2) 算法过程

假设结点 v_i 和结点 v_j 之间流量不能低于限制值 Z , 步骤如下:

第一步 如果边 (v_i, v_j) 的流量小于限制值 Z , 进行以下过程:

(1) 按照标记法先找从起点 x 到结点 v_i 的不饱和链 Q_1 ;

(2) 按照标记法再找从结点 v_j 到终点 y 的不饱和链 Q_2 ;

(3) 确定增流链 $Q_1 + (v_i, v_j) + Q_2$ 的调整量: $l(Q_1 + (v_i, v_j) + Q_2) = \min\{l(Q_1), C(v_i, v_j) - f(v_i, v_j), l(Q_2)\}$;

(4) 对增流链 $Q_1 + (v_i, v_j) + Q_2$, 按照修改流性质进行流量调整。如果两个限制结点之间流量大于等于限制值 Z , 停止, 否则, 返回第 (1) 个过程。

第二步 对图 G 调用 $f_f(G)$, 如果增流链 Q 包含边 (v_i, v_j) , 为了满足规则 1 和规则 2, 增流链 Q 的调整量按如下确定:

如果边 (v_i, v_j) 为前向边时,

$$l(Q) = \min\{l(Q_1), C(v_i, v_j) - f(v_i, v_j), l(Q_2)\}$$

如果边 (v_i, v_j) 为后向边时,

$$l(Q) = \min\{l(Q_1), f(v_i, v_j) - Z, l(Q_2)\}$$

式中, Q_1 为起点 x 到结点 v_i 的不饱和链, Q_2 为结点 v_j 到终点 y 的不饱和链。

第三步 返回第二步, 不断循环, 直到不能找到增流链为止。

用 $f_f \{G, \text{MAXFlow} | (\text{Flow}(v_i, v_j) \geq Z)\}$ 来代替以上过程。

3.3 两个相邻结点之间流量在一定范围之内的算法

(1) 算法思想

将限制结点之间的容量值用最大限制值做新的容量，因为，流量的分配必须满足容量限制条件，那么，在计算过程中，限制结点之间的流量不会超过新的容量值；再利用增流链方法将图 G 中两个限制结点之间的流量调整到最小限制值，在此基础上进行流量分配，但限制结点之间的流量必须满足以下规则：

规则 3 新的增流链如果包含两个限制结点，并且，两个限制结点的边为前向边，那么，该边的流量调整量为新的容量（最大限制值）减去流量。

规则 4 新的增流链如果包含两个限制结点，并且两个限制结点的边为后向边，那么，该边的流量调整量为流量减去最小限制值。

规则 3 是使两个限制结点之间的流量不超过最大限制值，规则 4 是保证两个限制结点之间流量不低于最小限制值。

(2) 算法过程

假设结点 v_i 和结点 v_j 之间流量在限制值 Z_1 和 Z_2 之间，步骤如下：

第一步 用限制值 Z_2 代替图 G 中的 $C(v_i, v_j)$ ，即 $C(v_i, v_j) = Z_2$ ，将变化后的图用 G^n 表示。

第二步 在满足规则 3 和规则 4 的基础上对新图 G^n 调用 3.2 中的算法，即：

$$f_f \{G^n, \text{MAXFlow} | (\text{Flow}(v_i, v_j) \geq Z_1)\}$$

则图 G 中结点 v_i 和结点 v_j 之间流量在限制值 Z_1 和 Z_2 之间的最大流即为：

$$\begin{aligned} & f_f \{G, \text{MAXFlow} | (Z_1 \leq \text{Flow}(v_i, v_j) \leq Z_2)\} \\ & = f_f \{G^n, \text{MAXFlow} | (\text{Flow}(v_i, v_j) \geq Z_1)\} \end{aligned}$$

4 示 例

已知某交通网络如图 1 所示。图中数据表示结点

之间最大通行能力，即边的容量，请分配最大的流量，并要求结点 v_6 到结点 v_5 之间的流量在 8 和 10 之间。

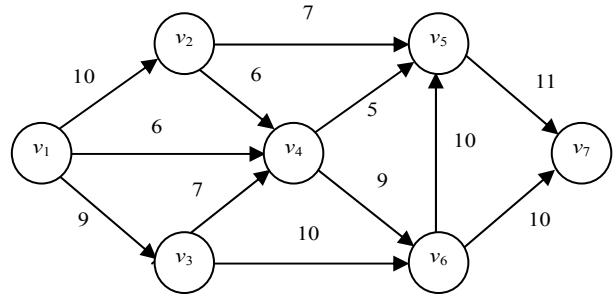


图 1 交通网络结构

Fig.1 Structure of a traffic network

如果不考虑结点 v_6 到结点 v_5 之间的流量要求条件，直接调用 Ford-Fulkerson 算法即可。但针对约束条件，需要利用本文涉及的算法，流量分配主要过程如下：

第一步 将结点 v_6 到结点 v_5 之间的流量限制值用 Z_1 和 Z_2 表示，即 $Z_1 = 8, Z_2 = 10$ ，给图一个初始流，同时用限制值 Z_2 代替交通网络图中的 $C(v_6, v_5)$ ，即 $C(v_6, v_5) = Z_2 = 10$ ，如图 2 所示。

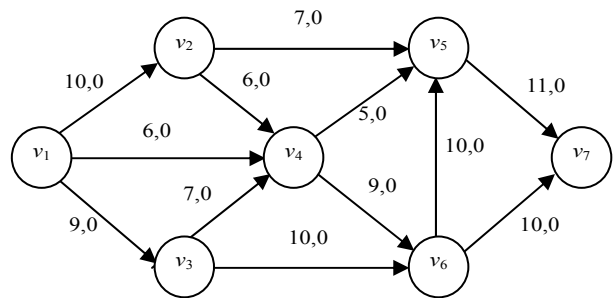


图 2 初始流量的运输网络结构

Fig.2 Structure of a transportation network with the initialization flow

第二步 边 (v_6, v_5) 的流量不小于限制值 Z_1 。先寻找从起点 v_1 到结点 v_6 的不饱和链，假设寻找到不饱和链 Q_1 为 $v_1 \rightarrow v_4 \rightarrow v_6$ ，那么，调整量为：

$$\begin{aligned} L(Q_1) &= \min\{l(v_1, v_4), l(v_4, v_6)\} \\ &= \min\{C(v_1, v_4) - f(v_1, v_4), C(v_4, v_6) - f(v_4, v_6)\} \end{aligned}$$

$$= \min\{6 - 0, 9 - 0\} = 6$$

再寻找从结点 v_5 到终点 v_7 的不饱和链 Q_2 为 $v_5 \rightarrow v_7$,

那么, 调整量为:

$$\begin{aligned} L(Q_2) &= \min\{l(v_5, v_7)\} \\ &= \min\{C(v_5, v_7) - f(v_5, v_7)\} \\ &= \min\{11 - 0\} = 11 \end{aligned}$$

增流链 $Q_1 + (v_6, v_5) + Q_2$ 的调整量:

$$\begin{aligned} l(Q_1 + (v_6, v_5) + Q_2) &= \min\{l(Q_1), C(v_6, v_5) \\ &\quad - f(v_6, v_5), l(Q_2)\} \\ &= \min\{6, 10 - 0, 11\} = 6 \end{aligned}$$

利用修改流性质进行调整, 结果如图 3 所示。

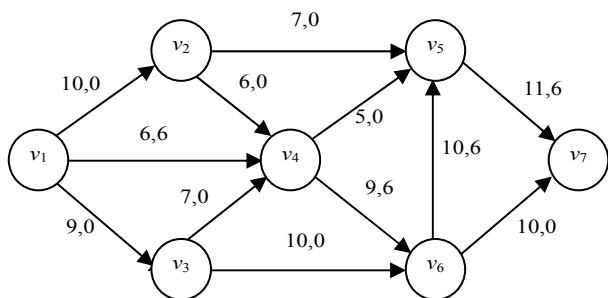


图 3 基于修改流的第一次流量分配

Fig. 3 First flow distribution based on the modification flow

第三步 边 (v_6, v_5) 的流量仍然小于限制值 Z_1 , 再寻找从起点 v_1 到结点 v_6 的不饱和链, 假设寻找到的不饱和链 Q_1 为 $v_1 \rightarrow v_3 \rightarrow v_4 \rightarrow v_6$, 那么, 调整量为:

$$\begin{aligned} L(Q_1) &= \min\{l(v_1, v_3), l(v_3, v_4), l(v_4, v_6)\} \\ &= \min\{C(v_1, v_3) - f(v_1, v_3), C(v_3, v_4) \\ &\quad - f(v_3, v_4), C(v_4, v_6) - f(v_4, v_6)\} \\ &= \min\{9 - 0, 7 - 0, 9 - 6\} = 3 \end{aligned}$$

再寻找从结点 v_5 到终点 v_7 的不饱和链 Q_2 为 $v_5 \rightarrow v_7$, 那么, 调整量为:

$$\begin{aligned} L(Q_2) &= \min\{l(v_5, v_7)\} \\ &= \min\{C(v_5, v_7) - f(v_5, v_7)\} \\ &= \min\{11 - 6\} = 5 \end{aligned}$$

增流链 $Q_1 + (v_6, v_5) + Q_2$ 的调整量:

$$l(Q_1 + (v_6, v_5) + Q_2) = \min\{l(Q_1), C(v_6, v_5)$$

$$- f(v_6, v_5), l(Q_2)\}$$

$$= \min\{3, 10 - 6, 5\} = 3$$

利用修改流性质进行调整, 结果如图 4 所示。

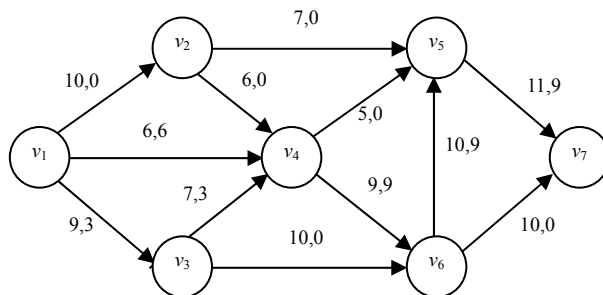


图 4 基于修改流的第二次流量分配

Fig. 4 Second flow distribution based on modification flow

第四步 边 (v_6, v_5) 流量已经满足限制值 Z_1 要求, 对图调用 Ford-Fulkerson(G)算法, 假设寻找到的增流链 Q 为 $v_1 \rightarrow v_3 \rightarrow v_6 \rightarrow v_5 \rightarrow v_7$, 此增流链中包含边 (v_6, v_5) , 而且, 边 (v_6, v_5) 为前向边, 那么, Q 的调整量为:

$$\begin{aligned} L(Q) &= \min\{l(v_1, v_3), l(v_3, v_6), l(v_6, v_5), l(v_5, v_7)\} \\ &= \min\{C(v_1, v_3) - f(v_1, v_3), C(v_3, v_6) - \\ &\quad f(v_3, v_6), C(v_6, v_5) - f(v_6, v_5), \\ &\quad C(v_5, v_7) - f(v_5, v_7)\} \\ &= \min\{9 - 3, 10 - 0, 10 - 9, 11 - 9\} = 1 \end{aligned}$$

利用修改流性质进行调整, 结果如图 5 所示。

第五步 继续对图调用 $f_f(G)$ 算法, 假设寻找到的增流链 Q 为 $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_5 \rightarrow v_6 \rightarrow v_7$, 此增流链中包含边 (v_6, v_5) , 而且, 边 (v_6, v_5) 为后向边, 那么, Q 的调整量为:

$$\begin{aligned} L(Q) &= \min\{l(v_1, v_2), l(v_2, v_5), f(v_6, v_5) \\ &\quad - Z_1, l(v_6, v_7)\} \\ &= \min\{C(v_1, v_2) - f(v_1, v_2), C(v_2, v_5) \\ &\quad - f(v_2, v_5), f(v_6, v_5) - Z_1, C(v_6, v_7) \\ &\quad - f(v_6, v_7)\} \\ &= \min\{10 - 0, 7 - 0, 10 - 8, 10 - 0\} = 2 \end{aligned}$$

此过程确保边 (v_6, v_5) 的流量不违反限制值 Z_1 的要求, 利用修改流性质进行调整, 结果如图 6 所示。

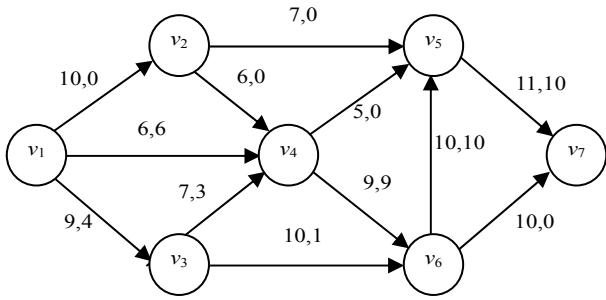


图5 基于修改流的第三次流量分配
Fig. 5 Third flow distribution based on modification flow

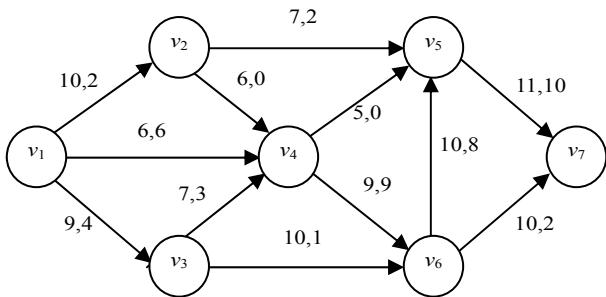


图6 基于修改流的第四次流量分配
Fig. 6 Fourth flow distribution based on modification flow

第六步 按照以上思路继续对图调用 $f_f(G)$ 算法, 最后的结果如图7所示。

可以继续寻找到源 v_1 到汇 v_7 的增流链, 但若继续进行流量调整, 就会使边 (v_6, v_5) 的流量违反限

制值 Z_1 的要求, 所以, 基于结点 v_6 到结点 v_5 之间的流量在 8 和 10 之间的最终最大流方案如图7所示。

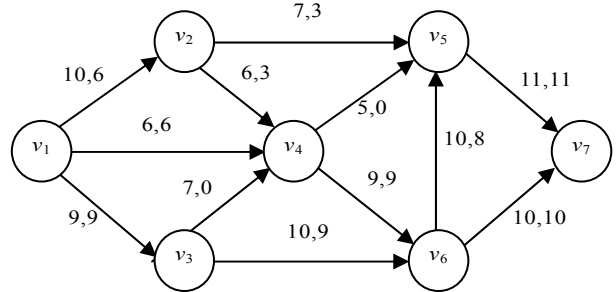


图7 最大流量分配方案

Fig. 7 Maximum flow distribution scheme

5 结束语

本文研究的主要内容是将 Ford-Fulkerson 算法和交通网络中两个相邻结点之间有流量约束条件结合起来, 构造了三个算法。在这三个算法基础上, 对有同类约束条件的最大流问题可以进行相应的应用; 同时, 在交通网络的控制和管理中, 这些方法对交通流预疏导问题、交通网络态势控制问题以及交通流均衡问题起着借鉴作用。

尽管三个算法有其独有的特点, 但在交通网络中有许多问题需要不断的探讨和研究, 尤其是对流量不确定问题需要更加完善的处理, 这就有必要和其他理论有机结合进行相关的研究。

参考文献

- [1] 甘爱英等. 运筹学[M]. 北京: 清华大学出版社, 2002.
- [2] 焦永兰. 管理运筹学[M]. 北京: 中国铁道出版社, 2005.
- [3] 藤传琳. 管理运筹学[M]. 北京: 中国铁道出版社, 1986.
- [4] 凌永发, 陈国良, 李正明. 网络最大流问题典型组合算法研究[J]. 云南民族大学学报, 2006, 15(3): 211-21.
- [5] AHUJA R. K., MAGNANTI T. L. Network flows: theory, algorithms and applications[M]. New jersey: Prentice-Hall. 2000.
- [6] DINIC E. A. Algorithm for solution of a problem of maximum flow in networks with power estimation[J]. Soviet Math Dokl, 1970, 11(8): 1277-1280.
- [7] Daiheng Ni. Determining traffic-flow characteristics by definition for application in ITS [J]. IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems, 2007, 8(2): 181-187.
- [8] GOLDBERG A. V., RAO S. Flows in undirected

- unit capacity networks[J]. SIAM J Discrete Math, 1999, 12 (1): 1-5.
- [9] 徐周波, 古天龙, 赵岭忠. 网络最大流问题求解的符号 ADD 增广路径算法[J]. 计算机科学, 2005, 32 (10): 38-54.
- [10] Hachtel G. D., So Menzi. A symbolic algorithm for maximum flow in 0-1 networks[J]. Formal Methods in System Design, 1997, 10(2-3): 207-219.
- [11] Wang Xiubin, Wang Fenghuan. Dynamic network yield management[M]. Transportation Research Part B 41, 2007: 410-425.
- [12] Goldberg AV. Recent developments in maximum flow algorithms[C]. In: Proceedings of the 6th Scandinavian Workshop on Algorithm Theory. Stockholm: 1998.
- [13] Hochbaum D. The pseudoflow algorithm and the pseudo flow-based simplex for the maximum flow problem[C]. In: Proceedings of the Integer Programming and Combinatorial Optimization the 6th International Conference(IPCO). Houston: 1998. 325-337.
- [14] Chang Chungju, Cheng Rayguang, Shih Haotang, Chen Yihshen. Maximum freedom last scheduling algorithm for downlinks of DSRC networks[J]. IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems, 2007, 8(2): 223-232.

(中文编辑: 吴继屏)

上接第 6 页

案进行调整, 重新确定各个相位的绿灯时间。

5 结 论

本文主要围绕城市中心区域住宅项目交通影响分析所涉及到的内容, 采用定量与定性分析相结合的

方法对哈尔滨市盟科官邸住宅建筑可能产生的交通影响进行调查、预测和分析, 分析的结论为: 盟科官邸住宅项目建成入住后, 其引发的交通量在高峰时段会带来周遍路段交叉口出现交通拥堵, 应采取拓宽道路、限制车辆左转、优化信号配时方案等弯改善措施加以解决。

参考文献

- [1] Wolfe D. L. Traffic impact analysis report guidelines [R]. The County of Los Angeles Department of Public works, 1997, 9-11.
- [2] 陈宽民, 严宝杰主编. 道路通行能力分析[M]. 北京: 人民交通出版社, 2003.
- [3] 郑连勇. 城市交通影响评价[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2006.

(中文编辑: 吴继屏)