

多品种流中特定品种在结点上的流量有要求的最大流算法设计

丁 振 寇玮华 崔皓莹

西南交通大学，交通运输与物流学院，成都 610031

摘 要：本文首先分析多品种流交通网络的特性，在借鉴 Ford-Fulkerson 算法的基础上构造了求多品种问题最大流的基于多品种流的 Ford-Fulkerson 算法。然后分析了多品种流交通网络对特定品种在结点上的流量有要求的几种情况，并设计了这几种情况下交通网络求最大流的算法。在实际交通网络中多品种流问题普遍存在，对特定结点的品种的流量有要求的多品种问题更是不胜枚举，本文的算法为解决实际问题提供了应用基础。

关键词：多品种流；Ford-Fulkerson 算法；流量要求；交通网络

中图分类号：U121

文献标识码：A

文章编号：1672-4747 (2014) 02-0083-07

DOI:10.3969/j.issn.1672-4747.2014.02.007

Algorithm Design for the Maximum Flow of a Node

with Flow Requirements for a Special Variety

Flow in Multi-varieties Flow

DING Zhen KOU Wei-hua CUI Hao-yin

School of Transportation and Logistics, Southwest Jiaotong

University, Chengdu 610031, China

Abstract: Having analyzed the characteristics of the multi-variety flow traffic network, a Ford-Fulkerson algorithm for calculating the maximum flow of a multi-variety flow traffic network was designed. According to several cases of a node with flow requirements for some special varieties, the algorithm for the cases were designed respectively. In the real traffic networks the problems in multi-variety flows are existed widely, and the maximum flow determination for some special variety flows is very common, the algorithm could

收稿日期：2013-09-05.

作者简介：丁 振（1989-），男，汉族，湖北荆州人，西南交通大学交通运输与物流学院硕士研究生，研究方向为交通规划与交通流网络。

provide a application basis for these practical problems.

Key words: Multi-variety flows, Ford-Fulkerson algorithm, flow requirements, traffic network

0 引言

最大流问题是图论的核心问题之一,传统的最大流算法只能对单一品种的流量进行分配^[1-4]。而对于多品种问题,虽然可以通过按品种拆分结点重构网络来求解最大流,但是,这种解法经常使得运算过程很繁琐^[5,6]。多品种流交通网络中,特定品种在结点上的流量有要求的问题,类似于运输问题中的多品种问题,在实际交通网络中频繁出现,而在图论中暂时没有很好的求解方法。本文先对求解最大流的 Ford-Fulkerson 算法进行改进,构造求解多品种问题最大流的算法,然后在这个基础上构造了特定品种在结点上的流量有要求的交通网络最大流算法。

1 基于多品种问题的 Ford-Fulkerson 算法描述

1.1 多品种流的交通网络特性分析

多品种流可以定义为在交通网络中存在的多股相互独立的流。

传统的交通网络中,只针对单一品种流进行分析,而实际的交通网络常常涉及多品种流的输送。多品种流网络具有以下几个特点:

(1) 独立性。除非有特别说明,否则各品种流之间不能相互代替,具有独立性。

(2) 结点的准入特性。与一般交通网络不同,多品种流交通网络上每个结点对流的进入有品种限制。

(3) 发出点与接收点。多品种流交通网络有特定的一个或多个发出点与接收点。

目前求网络最大流主流的算法有 Ford-Fulkerson 算法等,而为求多品种流网络的最大流势必要对原有算法进行改进。

通过对多品种流交通网络特性的分析,基于多品种问题的 Ford-Fulkerson 算法与一般 Ford-Fulkerson

算法的区别主要有以下几个方面:

(1) 结点的标记。多品种问题中有发出点与接收点,本文用 x_i 、 y_j 分别表示交通网络中发出点和接收点。为了运算方便,定义一个总源点 x 和总汇点 y ,其他中间点用 v_i 来表示。

(2) 网络中边上流量的表示。一般 Ford-Fulkerson 算法用一个数值表示边上的流量,而基于多品种问题的 Ford-Fulkerson 算法用集合 $f(f_k)=(f_1, f_2, \dots, f_k, \dots, f_q)$ 表示该边上每一种品种的流量。

(3) 在一条增流链上,基于多品种问题的 Ford-Fulkerson 算法只能对一个品种的流量进行调整。

(4) 由于结点的准入特性,在增流时,多品种问题需要确认下一个结点是否能接收该品种的流量。

1.2 多品种流交通网络描述

根据以上描述,对基于多品种问题的 Ford-Fulkerson 算法可以定义如下:

(1) 交通网络图用 $G=(X, Y, V, E, C, F)$ 来表示。

(2) 集合 $X=\{x_i | i=1, 2, \dots, n_1\}$, x 为图 G 的源, x_i 为发出点;集合 $Y=\{y_j | j=1, 2, \dots, n_2\}$, y 为图 G 的汇, y_j 为接收点;中间结点集合 $V=\{v_i | i=1, 2, \dots, n_3\}$ 。其中 X 、 Y 和 V 只能接收或发出特定品种的流量;边集合 $E=\{e(x_i, x_i), e(x_i, v_i), e(v_i, v_j), e(v_j, y_j), e(y_i, y), e(x_i, y_j) | x_i \in X, v_i, v_j \in V, y_i, y \in Y\}$; C 为边的容量的集合;

(3) F 为边的流量的集合,假设 k 为图 G 中的第 k 个品种 ($k=1, 2, \dots, q$), f_{uv}^k 为边 (u, v) 上品种 k 的流量, $f_{uv}(f_k)=(f_1, f_2, \dots, f_q)$ 表示边 (u, v) 上各品种的流量,并且 $f_1+f_2+\dots+f_q=f(u, v)$, $f(u, v)$ 为该边上所有品种流量之和。

图 G 中满足以下条件的一组流可以称为可行流:

容量限制条件,对任意边 $e=(u, v) \in E$ 有

$$0 \leq \sum_{k=1}^{k=q} f_{uv}^k = f(u, v) \leq c$$

其中, c 为 (u, v) 的容量, f_{uv}^k 为该边上品种 k 的流量。

结点流量平衡条件：

对于结点 $u \neq x, y$ ，有

$$\begin{cases} \sum_{(u,v) \in E} f_{uv}^k = \sum_{(u,v) \in E} f_{vu}^k & (k=1,2,\dots,q) \\ \sum_{(u,v) \in E} f(u,v) = \sum_{(u,v) \in E} f(u,v) \end{cases}$$

以上条件保证结点上每个品种的流量守恒，同时保证了结点上所有品种的流量之和的守恒。

用 $v(f^k)$ 表示从 x 到 y 的品种 k 的可行流的流量， $v(f)$ 表示从 x 到 y 的可行流流量的总和。对于结点 $u=x$ 或 y ，有

$$\sum_v f_{uv} - \sum_v f_{vu} = \begin{cases} v(f) & \text{当 } u=x \text{ 时} \\ -v(f) & \text{当 } u=y \text{ 时} \end{cases}$$

和
$$\sum_v f_{uv}^k - \sum_v f_{vu}^k = \begin{cases} v(f^k) & \text{当 } u=x \text{ 时} \\ -v(f^k) & \text{当 } u=y \text{ 时} \end{cases}$$

1.3 算法步骤

基于多品种问题的 Ford-Fulkerson 算法步骤如下^[7]：

第一步：给图 G 一个初始流（一般为平凡的可行流）。给初始流的过程中要满足以下规则：

规则 1：输送给结点的某品种的流量必须满足该结点对品种类别的要求。

规则 2：各个品种之间的流量应该区分开来。

交通网络 G 上各边对容量和流量的描述应遵从多品种流特点，用 $[c, (f_1, f_2, \dots, f_q)]$ 表示。同时给结点 x 标号。

第二步：寻找源 x 到汇 y 的增流链 Q 的方法：

寻找增流链首先必须满足下列规则：

规则 3：一条增流链上只能对一个品种的流量进行调整。当对某个品种在增流链上进行流量调整时，不管是前向边还是后向边，在该增流链上只能对该品种的流量进行调整。

(1) 与结点 v 相关的边上某一品种能否增流的条件：

基于规则 1，即结点 v 能否接收该品种的流。

当边 $e=(u,v)$ 为前向边时，有 $f(u,v)=$

$$\sum_{k=1}^q f_{uv}^k < C(u,v) ;$$

当边 $e=(u,v)$ 为后向边时，有边 (u,v) 上品种 k 的流

量 $f_{uv}^k > 0$ 。

(2) 对满足以上条件的结点 v 进行标记 (u ，边的方向和调整的品种， $l_k(v)$)。其中 u 为标记点 v 的前一个结点； v 为终点时边的方向，用+表示； v 为始点时边的方向，用-表示；边的方向和调整的品种表示如下： $+k$ 或者 $-k$ ； $l_k(v)$ 表示品种 k 的调整量。 v 为终点时 $l_k(v)=\min\{l_k(u), C(u,v)-f(u,v)\}$ ， v 为始点时 $l_k(v)=\min\{l_k(u), f_{uv}^k\}$ ，其中 $f(u,v)$ 为 (u,v) 上所有品种流量之和。

第三步：按照标号的第一项，从汇 y 进行反向追踪，可得到增流链 Q 以及品种 k 的调整量 $l_k(Q)=l_k(y)$ 。

第四步：利用修改流性质进行调整：

(1) 增流链 Q 的前向边，品种 k 的流量加上调整量 $l_k(Q)$ 。

(2) 增流链 Q 的后向边，品种 k 的流量减去调整量 $l_k(Q)$ 。

(3) 非增流链 Q 的边的调整量不变。

第五步：返回第二步，不断循环，直到不能找到增流链为止。

为了引用方便，在这里假设用 MV-Ford-Fulkerson(G) 表示基于多品种的 Ford-Fulkerson 算法，其中 G 表示交通网络图。

2 对特定品种在结点上的流量有要求的几种情况

为了描述图 G 中对特定品种在结点上的流量有要求的约束条件^[8]，将基于多品种流的 Ford-Fulkerson 算法的描述形式采用 MV-Ford-Fulkerson $\{G, \text{MAXFlow}(A)\}$ 来表示，其中 $\text{MAXFlow}(A)$ 表示在约束条件 A 下的最大流量。若 $A=\emptyset$ ，即对特定品种没有约束条件的 MV-Ford-Fulkerson 算法用 MV-Ford-Fulkerson $\{G, \text{MAXFlow}(\emptyset)\}$ 表示。本文讨论的对特定品种的流量有要求的 4 种情况描述如下：

(1) 某发出点发出某一品种的流量有最低限制

假设交通网络图中有 q 个品种，要求发出点 x_i 发出品种 k 的流量至少为 Z_k 。用 MV-Ford-Fulkerson

$\{G, \text{MAXFlow} | (\text{Flow}(x_i)^k \geq Z)\}$ 来描述此约束条件。

(2) 某接收点接收某一品种的流量有最低限制

假设交通网络图中有 q 个品种, 要求接收点 y_j 接收品种 k 的流量至少为 Z 。用 MV-Ford-Fulkerson $\{G, \text{MAXFlow} | (\text{Flow}(y_j)^k \geq Z)\}$ 来描述此约束条件。

(3) 某发出点发出某一品种的流量有最高限制

假设交通网络图中有 q 个品种, 要求发出点 x_i 发出品种 k 的流量最多为 Z 。用 MV-Ford-Fulkerson $\{G, \text{MAXFlow} | (\text{Flow}(x_i)^k \leq Z)\}$ 来描述此约束条件。

(4) 某接收点接收某一品种的流量有最高限制

假设交通网络图中有 q 个品种, 要求接收点 y_j 接收品种 k 的流量最多为 Z 。用 MS-Ford-Fulkerson $\{G, \text{MAXFlow} | (\text{Flow}(y_j)^k \leq Z)\}$ 来描述此约束条件。

3 多品种流中对特定品种在结点上的流量有要求的最大流算法

3.1 某发出点发出的某一品种的流量有最低限制的算法

(1) 算法思想^[9]

由于输送流量给发出点 x_i 的边仅有一条, 因此该约束可以转换为要求边 (x, x_i) 上的品种 k 的流量至少为 Z 。在计算过程中, 先利用增流链方法将图 G 中在 x 与 x_i 之间品种 k 的流量调整到限制值, 在此基础上进行流量分配。但 (x, x_i) 之间的流量须满足以下规则:

规则 4: 如果新的增流链包括 (x, x_i) , 且为前向边, 那么该边上的该品种的流量调整量为容量减去所有品种流量之和。

规则 5: 如果新的增流链包括 (x, x_i) , 且为后向边, 那么该边上的该品种的流量调整量为该品种的流量减去最低限值 Z 。

(2) 算法过程

发出点 x_i 发出品种 k 的流量不能低于限制值 Z , 步骤如下:

第一步: 如果边 (x, x_i) 上的品种 k 的流量 f_{xxi}^k 小于限制值 Z , 进行以下过程:

(1) 按照标记法先找从发出点 x_i 到汇 y 品种 k 的不饱和链 Q_1 , 寻找增流链的时候必须满足规则 1、2 和 3。

(2) 确定增流链 $(x, x_i) + Q_1$ 上的品种 k 的调整量: $l_k((x, x_i) + Q_1) = \min\{l_k(Q_1), C(x, x_i) - f(x, x_i)\}$ 。

(3) 对增流链 $(x, x_i) + Q_1$ 按照修改流性质进行流量调整, 如果 (x, x_i) 之间 f_{xxi}^k 大于等于限制值 Z , 停止。否则, 返回第 (1) 个过程。

第二步: 对图 G 调用 MV-Ford-Fulkerson(G), 寻找增流链。如果增流链 Q 包括 (x, x_i) , 并对品种 k 进行流量调整, 根据规则 4 和 5, 增流链的调整量如下所示:

当边 (x, x_i) 为前向边时, $l_k(Q) = \min\{l_k(Q_1), C(x, x_i) - f(x, x_i)\}$;

当边 (x, x_i) 为后向边时, $l_k(Q) = \min\{l_k(Q_1), f_{xxi}^k - Z\}$;

第三步: 返回第二步, 不断循环, 直到不能找到增流链为止。

在以上的算法中, 边 (x, x_i) 是不可能出现后向边的, 本文写出后向边的目的是为了能够拓展到对多品种问题任意一条边的流量有限制的情况。本文的算法对多品种网络上任意一条边上某品种的流量有限制的情况同样适用。

3.2 某接收点接收某一品种的流量有最低限制的算法

(1) 算法思想

同理, 该约束可以转换为要求边 (y_j, y) 上的品种 k 的流量至少为 Z 。在计算过程中, 先利用增流链方法将图 G 中在 y_j 与 y 之间品种 k 的流量调整到最低限制值, 在此基础上进行流量分配。规则与前述相似。

(2) 算法过程与 3.1 相似。

3.3 某发出点发出某一品种的流量有最高限制的算法

(1) 算法思想

限制边 (x, x_i) 上的品种 k 的流量最高为 Z 。只需在进行流量分配和流量调整时, 使边 (x, x_i) 上的品种 k 的流量不要超过限制值即可。

(2) 算法步骤

调用 MV-Ford-Fulkerson(G)。

第一步：给图 G 一个初始流。若 (x, x_i) 上 $f_{xx_i}^k < Z$ ，则进行下一步，否则重新分配流量。

第二步：寻找源 x 到汇 y 的增流链 Q 。

(1) 检查增流链上是否包含边 (x, x_i) ，并且对品种 k 进行了流量调整。否则，进行第三步。

(2) 当增流链 Q 上有边 (x, x_i) ，并且调整的是品种 k 的流量，则确认调整后 $f_{xx_i}^k$ 是否小于等于 Z ，若是则进行下一步，否则重新调整 $l_k(Q)$ 的值或者重新寻找增流链。

第三步：返回第二步，不断循环，直到不能找到增流链为止。

3.4 某接收点接收某一品种的流量有最高限制的算法

(1) 算法思想

限制边 (y_j, y) 上的品种 k 的流量最高为 Z 。只需在进行流量分配和流量调整时，使边 (y_j, y) 上的品种 k 的流量不要超过限制值即可。

(2) 算法步骤

算法过程与 3.3 相似。

4 示 例

已知某交通网络有 3 个品种、和 的货物需要输送，各结点关系如图 1 所示，图中数值表示边的容量。表 1 表示各结点所能接收的品种。要求结点 x_1 发出品种 的数量至少为 4， y_2 接收品种 的数量至少为 5， x_3 发出品种 的数量最多为 3， y_3 接收品种 的数量最多为 4，请分配最大流。

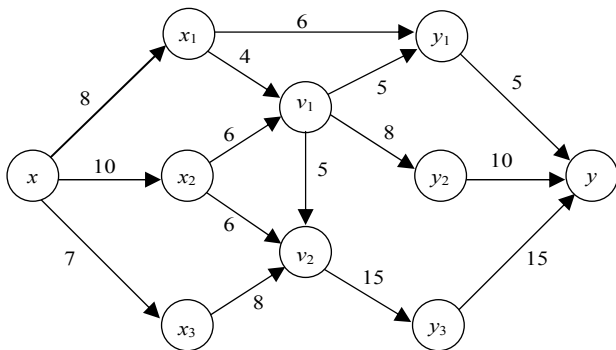


图 1 运输网络结构

Fig.1 Configuration of traffic network

表 1 各结点所能接收的品种类型

Tab.1 Types of the varieties each node can receive

x	x_1	x_2	x_3	v_1	v_2	y_1	y_2	y_3	y
√	√	√		√		√	√	√	√
√	√		√	√	√		√	√	√
√		√	√	√	√			√	√

该题是多品种流的问题，同时对特定的品种有条件要求，因此不能直接采用 Ford-Fulkerson 算法。针对题中的约束条件，可以采用本文相关的一些算法。由于篇幅限制，省略掉寻找增流链的过程，解题过程如下：

给定初始流为零流，如图 2 所示。

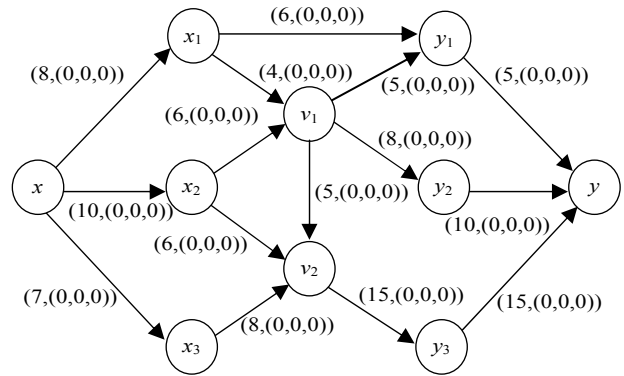


图 2 初始化的运输网络结构

Fig.2 Initialization of the transportation network configuration

针对约束条件，结点 x_1 发出品种 的数量至少为 4，即要求 (x, x_1) 上的品种 的流量至少为 4。寻找 x_1 到 y ，品种 不饱和链 $Q_1: x_1 \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow y_3 \rightarrow y$ ，调整量：

$$\begin{aligned}
 l(Q_1) &= \min\{l(x_1, v_1), l(v_1, v_2), l(v_2, y_3), l(y_3, y)\} \\
 &= \min\{C(x_1, v_1) - f(x_1, v_1), C(v_1, v_2) - f(v_1, v_2), \\
 &\quad C(v_2, y_3) - f(v_2, y_3), C(y_3, y) - f(y_3, y)\} \\
 &= \min\{4 - (0+0+0), 5 - (0+0+0), 15 - (0+0+0), 15 - (0+0+0)\} = 4
 \end{aligned}$$

增流链 $(x, x_1) + Q_1$ 品种 的调整量： $l((x, x_1) + Q_1) = \min\{C(x, x_1) - f(x, x_1), l(Q_2)\} = \min\{8 - 0, 4\} = 4$ 。利用修改流性质进行调整， $f_{xx_1}^k = 4$ 。同时，由于限制了 y_3 接收

品种 的数量最多为 4，增流链上有边 (y_3,y) ，并对品种 增流，检查 (y_3,y) 上流量。品种 流量小于等于 4，该结果是满足限制条件的，结果如图 3 所示。

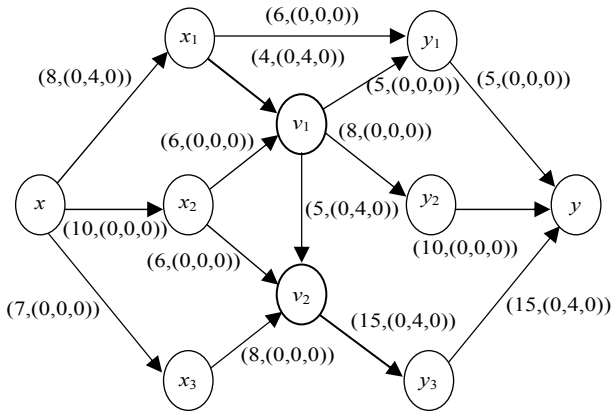


图 3 基于修改流的分配方案 1

Fig.3 Scheme 1 of flow distribution based on modification

同理，针对约束条件 y_2 接收品种 的数量至少为 5，即要求 (y_2,y) 上的品种 的流量至少为 5。寻找 x 到 y_2 ，品种 不饱和链 $Q_2 : x \rightarrow x_2 \rightarrow v_1 \rightarrow y_2$ ，调整量： $l(Q_2)=6$ 。增流链 $Q_2+(y_2,y)$ 品种 的调整量： $l(Q_2+(y_2,y))=6$ 。利用修改流性质进行调整，结果如图 4 所示。

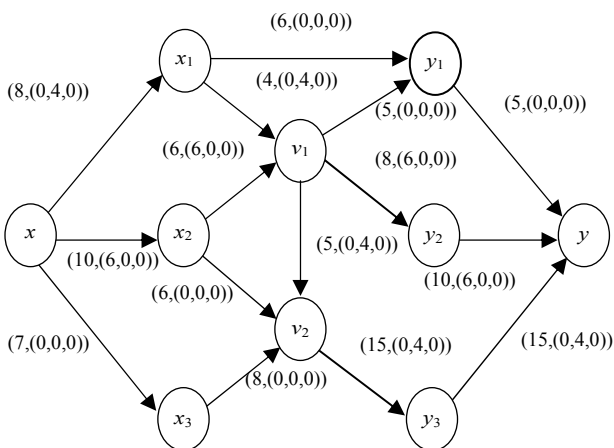


图 4 基于修改流的分配方案 2

Fig.4 Scheme 2 of flow distribution based on modification

第三步：寻找增流链。 $Q_3 : x \rightarrow x_1 \rightarrow y_1 \rightarrow y$ ，对品种 进行流量调整， $l(Q_3)=4$ ，结果如图 5 所示。同理，寻找增流链 $Q_4 : x \rightarrow x_2 \rightarrow v_2 \rightarrow y_3 \rightarrow y$ ，对品种 进行流量调整， $l(Q_4)=4$ ，结果如图 6 所示。寻找增流链 $Q_5 : x \rightarrow x_3 \rightarrow v_2 \rightarrow v_1 \rightarrow y_2 \rightarrow y$ ，对品种 进行流量调整， $l(Q_5)=3$ ，结果如图 7 所示。寻找增流链 $Q_6 : x \rightarrow x_3 \rightarrow v_2 \rightarrow y_3 \rightarrow y$ ，对品种 进行流量调整， $l(Q_6)=4$ ，结果如图 8 所示。

在图 4 中再无法寻找到增流链，最终方案如图 8 所示。

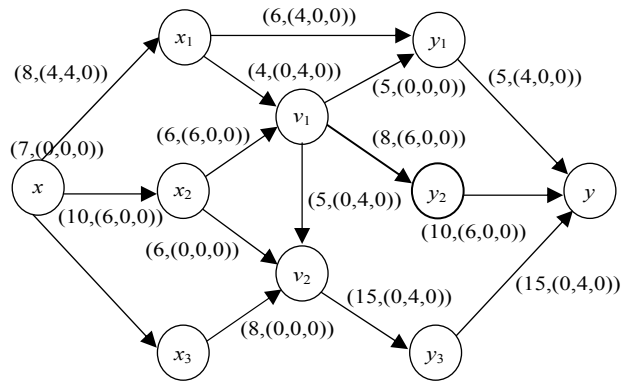


图 5 基于修改流的分配方案 3

Fig.5 Scheme 3 of flow distribution based on modification

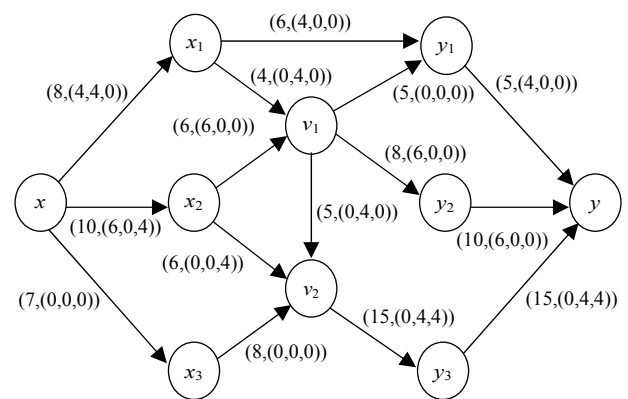


图 6 基于修改流的分配方案 4

Fig.6 Scheme 4 of flow distributing based on modification

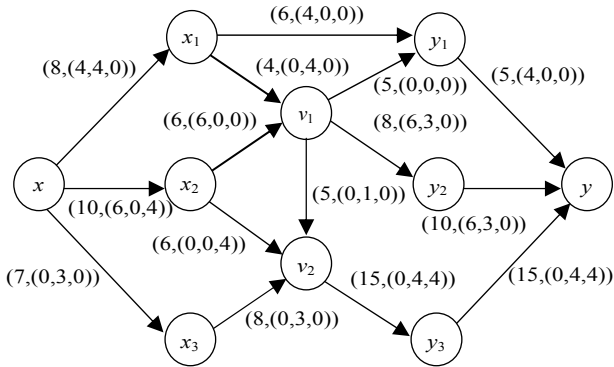


图 7 基于修改流的分配方案 5

Fig.7 Scheme 5 of flow distribution based on modification

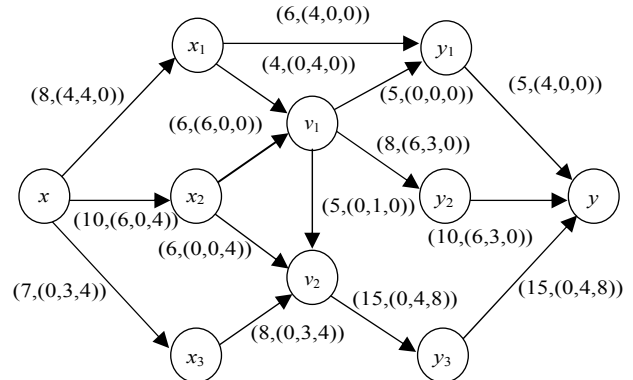


图 8 基于修改流的最终方案

Fig.8 Scheme of flow distribution based on modification

5 结束语

本文研究的算法,是在 Ford-Fulkerson 算法基础上,解决多品种流中结点上对特定品种的流量有要求的交通网络最大流问题,本文的算法对多品种网络上

任意一条边的某品种的流量有限制的情况同样适用。对于特别复杂的情况,本文的标号方法和各品种流量表示不是很明晰,应加以改进。本文研究对象针对的是发出点与接收点,而针对其他中间结点某品种流量的限制还没有研究,应继续研究相应的算法。

参考文献

- [1] 寇玮华. 运筹学[M]. 成都: 西南交通大学出版社, 2013.
- [2] 徐周波, 古天龙, 赵岭忠. 网络最大流问题求解的符号 ADD 增广路径算法[J]. 计算机科学, 2005, 32(10): 38-54.
- [3] 寇玮华, 李宗平. 运输网络中有流量需求的转运结点最大流分配算法[J]. 西南交通大学学报, 2009, 44(1): 118-121
- [4] Daiheng Ni. Determining Traffic-Flow Characteristics by Definition for Application in ITS [J]. IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems, 2007, 8(2): 181-187.
- [5] 焦永兰. 管理运筹学[M]. 北京: 中国铁道出版社, 2005.
- [6] 甘爱英等. 运筹学[M]. 北京: 清华大学出版社, 2002.
- [7] 孙泽宇, 丁国强, 程志谦. 网络最大流求解算法的研究[J]. 微计算机信息, 2010, (03): 143-145.
- [8] 寇玮华, 董雪, 吕林剑. 交通运输网络中两个结点间有流量约束的最小费用最大流算法[J]. 兰州交通大学学报, 2009, 28(6): 104-109
- [9] 寇玮华, 朱雪丽, 张聪聪. 交通网络两个相邻结点之间有流量约束的最大流分配算法[J]. 交通运输工程与信息学报, 2010, 8(1): 7-13.

(中文编辑: 刘娉婷)